THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Paramétrisations des ensembles coanalytiques à coupes relativement non maigres*. Note (*) de **Richard Daniel Mauldin** et **Shashi Mohan Srivastava,** présentée par Gustave Choquet.

Un théorème de sélection pour les multifonctions à valeurs dans les ensembles coanalytiques non maigres dans leur adhérence est établi dans cette Note, et utilisé pour démontrer l'existence de paramétrisations d'ensembles coanalytiques à coupes relativement non-maigres.

We prove a selection theorem for multifunctions with coanalytic, relatively non-meager values. This result is then used to derive the existence of parametrizations of coanalytic sets with relatively non-meager sections.

1. Introduction. — Dans la suite nous travaillons dans l'espace de Baire ω^ω des suites infinies d'entiers. Nous fixons une énumération récursive des suites finies d'entiers, et pour chaque entier s nous posons $N_s = \{\alpha \in \omega^\omega : \bar{s} \subseteq \alpha\}$, où $\bar{s}$ est la suite codée par s.

Définition 1. — Soit Γ une classe d'ensembles. Un ensemble $A \subset \omega^\omega$ est dit Γ-normal si l'ensemble $R_A \subset \omega$ défini par :

$$s \in R_A \leftrightarrow N_s \cap A \neq \emptyset,$$

est dans Γ (la Γ-normalité est en fait une propriété de l'adhérence $\overline{A}$ de A).

Cette notion est due à A. Maitra, et représente une version locale de la mesurabilité des multifonctions. Elle n'est évidemment intéressante que lorsque Γ est une classe effective (Δ_1^1, Γ_1^1 ou Σ_1^1).

Notre résultat de sélection est le suivant :

Théorème 1. — *Soit* $P \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ *un ensemble* Π_1^1, *et* $A \subset \omega^\omega$ *un ensemble* Σ_1^1. *Supposons que* P *et* A *vérifient :*

(*a*) *pour tout* $\alpha \in A$, *la coupe* P_α *est non vide, et non maigre dans* $\overline{P}_\alpha$;

(*b*) *il existe* $R \subset \omega^\omega \times \omega$, $R \in \Delta_1^1$ *tel que pour tout* $\alpha \in A$, *et tout* $s \in \omega$, *on ait :*

$$R(\alpha, s) \leftrightarrow P_\alpha \cap N_s \neq \emptyset$$

(*c'est-à-dire que chaque coupe* P_α, $\alpha \in A$, *est* $\Delta_1^1(\alpha)$*-normale, uniformément en* α).

Il existe alors un ensemble Δ_1^1, $Q \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ *qui est une sélection de* P, *c'est-à-dire que pour tout* α *dans* A *avec* $Q_\alpha \subset P_\alpha$, Q_α *est non maigre dans* $\overline{P}_\alpha$, *et de plus* Q_α *est* G_δ *et les* Q_α *sont uniformément* $\Delta_1^1(\alpha)$*-normaux en ce sens qu'il existe* $S \subset \omega^\omega \times \omega$, $S \in \Delta_1^1$, *tel que pour* $\alpha \in A$ *on ait* $S(\alpha, s) \leftrightarrow Q_\alpha \cap N_s \neq \emptyset$. *De plus, si les* P_α, $\alpha \in A$, *sont denses-en-soi, on peut trouver* Q *tel que les* Q_α *où* $\alpha \in A$, *le soient aussi.*

Remarque. — La première partie de l'énoncé est une généralisation d'un résultat de A. Maitra [4], qui démontre, avec les mêmes hypothèses que celles du théorème 1, l'existence d'une fonction Δ_1^1-récursive $f : \omega^\omega \to \omega^\omega$ telle que pour tout $\alpha \in A$ on ait $(\alpha, f(\alpha)) \in P$.

La démonstration du théorème 1 utilise le lemme suivant de A. Maitra [4].

Lemme 2. — *Soit* E *un ensemble fermé et* $\Delta_1^1(\alpha)$*-normal, et soit* $B \subset E$ *un ensemble* $\Sigma_1^1(\alpha)$ *et maigre dans* E. *Pour tout point* $\beta \in B$, *il existe un arbre* T *de suites finies d'entiers*, $T \in \Delta_1^1(\alpha)$, *tel qu'en notant* [T] *le fermé formé des branches de* T, [T] *soit un fermé rare dans* E, *avec* $\beta \in [T]$.

Nous indiquons dans la section 2 la démonstration du théorème 1. Les résultats de paramétrisation sont indiqués dans la section 3. Aides apportées lors de nombreuses

discussions, par A. Maitra et H. Sarbadhikari au second auteur et de A. Louveau pour la préparation de cette Note.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. – Le premier pas dans la preuve correspond au cas où P_α est comaigre dans $\overline{P}_\alpha$, pour chaque $\alpha \in A$.

THÉORÈME 2. – *Supposons les hypothèses du théorème* 1, *et aussi que pour tout* $\alpha \in A$ *on ait* P_α *soit comaigre dans* $\overline{P}_\alpha$. *Il existe alors un ensemble* Δ_1^1, $Q' \subset \omega \times \omega^\omega \times \omega^\omega$ *tel que pour tout* n *et pour tout* $\alpha \in A$, *la coupe* $Q'_{n,\alpha}$ *soit un fermé rare dans* $\overline{P}_\alpha$, *et que pour chaque* $\alpha \in A$, *on ait* $\overline{P}_\alpha - P_\alpha \subset \bigcup_n Q'_{n,\alpha}$.

Démonstration. – Pour $\alpha \in A$ fixé, l'hypothèse de $\Delta_1^1(\alpha)$-normalité de P_α implique que le fermé $\overline{P}_\alpha$ soit $\Delta_1^1(\alpha)$-normal. De plus $\overline{P}_\alpha - P_\alpha$ est un ensemble $\Sigma_1^1(\alpha)$ maigre dans $\overline{P}_\alpha$. Par suite le lemme de Maitra s'applique. La version uniforme désirée s'obtient par un argument de sélection Δ_1^1-récursive.

Remarque. – Dans sa version de type classique, ce résultat étend un résultat obtenu indépendamment par Cenzer et Mauldin [2] et Hillard [3] : Tout analytique à coupes maigres (dans le produit de deux espaces polonais) est contenu dans la réunion d'une suite de boréliens à coupes fermées et rares.

Démonstration du théorème 1. – Puisque pour chaque α, P_α est non maigre dans $\overline{P}_\alpha$, on peut choisir un ouvert fermé élémentaire $N_{s(\alpha)}$ (dépendant de α) tel que $P_\alpha \cap N_{s(\alpha)}$ soit comaigre dans $\overline{P}_\alpha \cap N_{s(\alpha)}$. Le choix de $N_{s(\alpha)}$ peut être fait de manière Δ_1^1-récursive par un argument de sélection. On est ainsi ramené aux hypothèses du théorème 2. Si Q' est l'ensemble Δ_1^1 dont ce théorème assure l'existence, il suffit de poser $Q_\alpha = P_\alpha \cap N_{s(\alpha)} - \bigcup_n Q'_{n,\alpha}$. On vérifie que Q répond à la question.

3. RÉSULTATS DE PARAMÉTRISATION. – Dans la suite, F désigne une multifonction $T \to X$, où T est un ensemble analytique d'un espace polonais, et X un espace polonais, et où F vérifie les conditions suivantes :

(*a*) pour tout $t \in T$, $F(t)$ est non maigre dans $\overline{F(t)}$, et non vide;

(*b*) le graphe de $F = \{(t, x) \in T \times X : x \in F(t)\}$ est coanalytique dans $T \times X$;

(*c*) F est mesurable, i. e. pour tout U ouvert de X, $\{t \in T : F(t) \cap U \neq \emptyset\}$ est borélien dans T.

De plus, comme tout espace polonais non dénombrable est boréliennement isomorphe à ω^ω, nous supposons $T \subset \omega^\omega$. Le premier à considérer cette classe de multifonctions est J. P. Burgess [1], qui a démontré que F admet toujours une sélection borélienne.

Une *paramétrisation* de F est une bijection $g : T \times X \to \text{Graphe}(F)$ telle que pour t fixe, $g(t, .)$ soit surjective de X sur $F(t)$. La paramétrisation g est borélienne si g est une fonction borélienne [ce qui nécessite que Graphe (F) soit borélien]. Plus généralement, si $\underline{\underline{A}}$ est une tribu sur $T \times X$ et Graphe $(F) \in \underline{\underline{A}}$, la paramétrisation g est $\underline{\underline{A}}$-mesurable si les fonctions g et g^{-1} sont $\underline{\underline{A}}$-mesurables.

Le résultat que suit est la relativisation directe du théorème 1. Il montre que le problème de trouver une paramétrisation pour F se réduit au cas de multifonctions dont les valeurs sont des G_δ.

THÉORÈME 4. — *Il existe une multifonction* H : T → X *telle que* H *soit Borel mesurable, de graphe borélien, et que pour chaque* $t \in T$ H (t) *soit un* G_δ *non maigre dans* F (t). *Si de plus* F (t) *est dense en soi, pour* $t \in T$, *alors* H (t) *peut être pris dense en soi.*

En utilisant un résultat de paramétrisation borélienne pour les multifonctions à valeurs G_δ ([5], th. 5.1), et par un argument du type Schröder-Bernstein, il est possible de déduire du résultat précédent le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Supposons que pour chaque* $t \in T$, F (t) *soit dense-en-soi. Alors* (*a*) F *admet* $2^{\aleph_0}$ *sélecteurs boréliens, de graphes deux à deux disjoints :*

(*b*) F *admet une paramétrisation* $\underline{\underline{A}}$ *mesurable, où* $\underline{\underline{A}}$ *est la tribu sur* T × X *engendrée par les ensembles analytiques;*

(*c*) *si de plus* Graphe (F) *est borélien,* F *admet une paramétrisation borélienne.*

(*) Remise le 6 avril 1981.

[1] J. P. BURGESS, *Careful Choices: A Last Word on Borel Selectors*, preprint, 1979.

[2] D. CENZER et R. D. MAULDIN, *Advances in Mathematics*, 38, 1980, p. 55-90.

[3] G. HILLARD, *Comptes rendus*, 288, série A, 1979, p. 749.

[4] A. MAITRA, *An Effective Selection Theorem* [*J. of Symbolic Logic* (à paraître)].

[5] H. SARBADHIKARI et S. M. SRIVASTAVA, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 258, 1980, p. 457-468.

R. D. M. : *Department of Mathematics, North Texas State University Denton, Texas* 76203 *U.S.A.*;

S. M. S. : *Indian Statistical Institute*, 203 *B.T. Road, Calcutta* 700035, *India.*